1096. Complex Banach space ニ於ケル
解析函數ニツイテ

霜田 伊左衛（阪大）

§ 1

Complete, complex normed vector space ヲ簡單ノタメニ complex Banach space ト呼ブコトニシマス。（Mathematische Annalen 115, 1938; A.E. Taylor ノ On the Properties of Analytic functions in Abstract space ヲ參照下サイ）

今 E, E′ ヲ complex Banach space トシマス。

〔定義〕 E ノ點 x_0 ノ近傍デ定義セラレ E′ ノ値ヲトル函數 $f(x)$ ガ E ノ任意ノ點 y ニ對シテ

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{f(x_0+\alpha y)-f(x_0)}{\alpha}$$

ガ strongly ニ存在スルトキ $f(x)$ ハ x_0 デ gateaux ノ意味デ微分可能デアルト云ヒマス。（α ハ複素數）

〔定義〕 E ニ於ケル領域 D デ定義セラレ E′ ノ値ヲトル函數 $f(x)$ ガ

1) D デ連續

2) D ノ各點デ gateaux ノ意味デ微分可能

ナルトキ $f(x)$ ハDデ正則デアルト云ヒマス。

従ッテDノ点 x_0, Eノ点 y ニ對シテ $f(x_0+\alpha y)$ ハ $\alpha=0$ ノ近傍デ α ニツイテ正則トナリマス。或ハ又Dハ開集合デスカラ x_0 ノ近傍ノ $x_0+\alpha y$ ($\|y\|<\varepsilon$ ナル y) ダケニツイテ考ヘテ宜シイコトニナリマス.

〔定義〕 Eデ定義セラレE′ノ値ヲトル函數 $p(x)$ ガ

1) Eデ連續

2) $E \ni x, y$ ナルトキ $p(x+\alpha y)=\sum_{k=0}^{n} \alpha^k p_k(x, y)$

3) アル x, y ニ對シ $p_n(x, y) \neq 0$

ノトキ $p(x)$ ヲ n 次ノ多項式ト呼ビマス。

上ノ條件ノ外ニ $p(\alpha x)=\alpha^n p(x)$ ナレバ之ヲ n 次齊次多項式ト云ヒマス。

($p_k(x, y)$ ハ x, y ノミニヨッテ定マル値デス)

上ノ定義ニヨレバ明カニ多項式ハEデ正則トナリマス.

又同ジ論文ニ於テ A.E. Taylor ハ次ノ定理ヲ述ベテ居リマス。

〔定理A〕 $f(x)$ ガ $\|x-x_0\|<\rho$ デ正則ナレバ任意ノ正數 ε ニ對シ $\|x-x_0\| \leq \rho-\varepsilon$ ニ含サレル compact set Gデ一様絶對收斂スル級數ニ展開セラレ

$$f(x)=f(x_0)+\sum_{1}^{\infty} f_n(x_0, x-x_0)$$

トナル。

$$\left(コヽ = f_n(x_0, x - x_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(x_0 + \alpha(x - x_0))}{\alpha^{n+1}} d\alpha \right.$$

デ表ハサレル $x - x_0$ ニツイテノ n 次ノ有次多項式$\Big)$

コノ級數ハ $\|x - x_0\| < \rho$ デ廣義ノ一樣收斂シマス。

〔定理 B〕 $f(x) = \sum_{1}^{\infty} f_n(x)$

ノ各ガ領域 D デ正則デ D ノ任意ノ compact set

デ一樣收斂スレバ $f(x)$ ハ D デ正則トナル。

§2

〔定理1〕 complex Banach space ニ於ケル領域 D_1, D_2 ニ於テ $X(x)$ ハ D_1 デ正則デ $X(x) \in D_2$, $f(X)$ ハ D_2 デ正則トスレバ $f(X(x))$ ハ D_1 デ正則トナル。

〔証明〕 $X(x)$ ハ正則デスカラ連續, 又 $f(X)$ モ正則デスカラ X ニツイテ連續トナリマス。從ッテ $f(X(x))$ ハ連續函數ノ連續函數デスカラ D_1 デ連續トナリマス。

次ニ $x \in D_1$ デアルヤウナ任意ノ x ニツイテハ x ハ内點デスカラ適當ニ $\delta(>0)$ ヲ定メ $\|y\| \leq \delta$ ナレバ常ニ $x + y \in D_1$ ナラシメルヤウニ出來マス。コノトキ複素數 α ニ對シ

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{f(X(x+\alpha y))-f(X(x))}{\alpha}$$

ガ存在スレバ $f(X(x))$ ハ x ニツイテ正則トナリマス。

今 D_1 ヲ 0 トシテ一般性ヲ失フコトナシ $x=0$ ニツイテ考ヘマス。

$X(y)$ ハ正則デスカラ 0 点ノ近傍，$\|y\|\leq\delta$ デ y ヲ定メルト $\alpha y\ (|\alpha|\leq 1)$ ハ compact set デスカラ

$$X(\alpha y)=X(0)+\alpha X_1(y)+\alpha^2X_2(y)+\cdots\cdots$$

ハ $|\alpha|\leq 1$ ニ對シテ絶對一様收斂シマス。

（コヽニ $X_n(y)$ ハ n 次齊次多項式）

今 $X'(y,\alpha)=X_1(y)+\alpha X_2(y)+\alpha^2X_3(y)+\cdots\cdots$

トオケバ

$$X(\alpha y)=X(0)+\alpha X'(y,\alpha)$$

$X(0)\in D_2$ デスカラ適當ニ $\varepsilon\ (>0)$ ヲトレバ

$\|X-X(0)\|\leq\varepsilon$ ハ D_2 ニ含マレマス。之ヲ $U_{X(0)}$ トシマス。コノトキ $\gamma\ (>0)$ ヲ充分小サクトレバ

$$X(0)+\alpha X'(y,\alpha')\in U_{X(0)}$$

$$(|\alpha|\leq\gamma,\quad |\alpha'|\leq\gamma)$$

何故ナレバ $X'(y,\alpha')$ ハ $|\alpha'|\leq 1$ デ絶對一様收斂シテキマスカラ α' ニツイテ連續デス。從ッテ $|\alpha'|\leq 1$ デ一様ニ $\|X'(y,\alpha')\|\leq M(y)$。

故ニ十分小サイ γ ニ對シテ $|\alpha|\leq\gamma,\ |\alpha'|\leq\gamma$ デハ

$$\|\alpha X'(y,\alpha')\|\leq\varepsilon$$

トナリマス。又 $|\alpha'|\leq\gamma$ ニ於テハ $X'(y,\alpha')$ ハ compact set ニナリマスカラ $X(0)+\alpha X'(y,\alpha')$ ($|\alpha|\leq\gamma,\ |\alpha'|\leq\gamma$) ハ compact set トナリマス。

之ヲ S トシマス。又 $f(x)$ ハ D_2 デ正則デスカラ $\mho_{X(0)}$ ニ於ケル compact set S デ

$$f(X(0)+\alpha X')=f(X(0))+\alpha f_1(X')+\alpha^2 f_2(X')$$
$$+\cdots\cdots$$

ハ一様絶對收斂シマス。

$$\frac{f(X(0)+\alpha X')-f(X(0))}{\alpha}-f_1(X')$$

$$=\alpha(f_2(X')+\alpha f_3(X')+\cdots\cdots)$$

ト書ケバ $f_2(X')+\alpha f_3(X')+\cdots\cdots$ ハ S デ一様收斂デスカラ S デ有界トナリマス.

$$\therefore\ \lim_{\alpha\to 0}\alpha(f_2(X')+\alpha f_3(X')+\cdots\cdots)=0$$

(之ハ $|\alpha'|\leq\gamma$ デ一様收斂デス)

即チ S デ一様ニ

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{f(X(0)+\alpha X')-f(X(0))}{\alpha}=f_1(X')$$

$$\therefore\ \lim_{\alpha\to 0}\frac{f(X(0)+\alpha X'(y,\alpha))-f(X(0))}{\alpha}=f_1(X'(y,\alpha))$$

之ハ $|\alpha'| \leqq r$ デ一様収斂トナリマス．然ルニ

$X'(y,\alpha')$ ハ α' ニツイテ連續デスカラ

$$\frac{f(X(0)+\alpha X'(y,\alpha'))-f(X(0))}{\alpha}$$

ハ α' ニツイテ連續トナリマス。之ガ一様収斂シタトコロノ $f_1(X'(y,\alpha')$ ハ α' ニツイテ連續トナリマス。

従ッテ任意ノ $\varepsilon'(>0)$ ニ對シ $|\alpha| < \delta'(\varepsilon')$ トスレバ

$$\left| f_1(X'(y,\alpha)) - f_1(X'(y,0)) \right| < \frac{\varepsilon'}{2}$$

$$\left| \frac{f(X(0)+\alpha X'(y,\alpha'))-f(X(0))}{\alpha} - f_1(X'(y,\alpha')) \right| < \frac{\varepsilon'}{2}$$

之ハ α' ニ無関係デスカラ $\alpha=\alpha'$ トオキマスト

$$\left| \frac{f(X(0)+\alpha X'(y,\alpha)-f(X(0))}{\alpha} - f_1(X'(y,\alpha)) \right| < \frac{\varepsilon'}{2}$$

$$\therefore \left| \frac{f(X(0)+\alpha X'(y,\alpha)-f(X(0))}{\alpha} - f_1(X'(y,0)) \right| < \varepsilon'$$

従ッテ $\displaystyle \lim_{\alpha\to 0} \frac{f(X(0)+\alpha X'(y,\alpha))-f(X(0))}{\alpha}$

ハ存在スル。

乃チ $\displaystyle \lim_{\alpha\to 0} \frac{f(X(\alpha x))-f(X(0))}{\alpha}$ ガ存在スル。

（以上）

[定理2] complex Banach space ニ於ケル一次有次

多項式ハ linear トナル。

〔証明〕 $u(x)$ ヲ一次斉次多項式トスレバ x ニツイテ連續デ，任意ノ複素数 α ($|\alpha|<\infty$) ニ對シ $u(\alpha x)=\alpha u(x)$，又任意ノ x, y ニ對シ $u(x+\alpha y)$ ハ α ニツイテ正則トナリマス。

$$u(x+y)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{u(x+\alpha y)}{\alpha-1}d\alpha \qquad (C:|\alpha|=r>1)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{u(x+\alpha y)}{\alpha^{n+1}}d\alpha$$

然ルニ $u(\alpha x)=\alpha u(x)$

$$\therefore \quad \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{u(x+\alpha y)}{\alpha^{n+1}}d\alpha=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{u(\frac{1}{\alpha}x+y)}{\alpha^{n}}d\alpha$$

今 $\frac{1}{\alpha}=\beta$ トオケバ $\quad d\alpha=-\frac{1}{\beta^2}, \quad \frac{1}{\alpha^n}=\beta^n$

$$\therefore \quad =\frac{-1}{2\pi i}\int_C u(\beta x+y)\beta^{n-2}d\beta$$

$u(\beta x+y)$ ノ $|\alpha|<r$ ノ値ヲ考ヘルト上ノヤウニナリマスガ $|\alpha|\geqq r$ 乃 $|\beta|\leqq\frac{1}{r}$ デ考ヘルタメニ積分ノ道ヲ逆ニシマスト

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_C u(\beta x+y)\beta^{n-2}d\beta$$

$|\beta|\leqq\frac{1}{r}$ デハ $u(\beta x+y)$ ハ β ニツキ正則デスカラ

$$=u(y) \qquad (n=1)$$

$$=0 \qquad (n\geqq 2)$$

又 $n=0$ ノトキハ

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}\frac{u(\beta x+y)}{\beta^2}d\beta=\frac{1}{2\pi i}\int_{C}\frac{u(x+\alpha y)}{\alpha}d\alpha=u(x)$$

$\therefore\quad u(x+y)=u(x)+u(y)$ （以上）

〔定理3〕 complex Banach space デ正則ナ函数 $u(x)$ ハ $u(\alpha x)=\alpha^n u(x)$ ナレバ任意ノ x, y ニ對シ

$$u(x+\alpha y)=\sum_{m=0}^{n}\alpha^m u_m(x,y)$$

（証明ハ上ノ証明ト殆ンド同様デス。之レカラ $f(x)$ ノ展開式ノ $f_n(x)$ ガ n 次斉次多項式トナルコトが分ルノデスカラ 或ハ A. E. Taylor が証明シテアルカモ知レマセン）。

〔系〕 $u(x)$ ハ complex Banach space デ正則デ 0 点ニ於テ $u(\alpha x)=\sum_{0}^{n}u_n(x)\alpha^n$ （$u_n(x)$ ハ n 次斉次多項式）ナル展開ヲ有スレバ $u(x)$ ハ多項式トナル.

〔補助定理〕 領域 $D(\|x\|<1)$ デ $f(x)$ ハ正則デ且

$$f(x)=\sum_{k=n}^{\infty}f_k(x) \text{ .... } (1)$$

（$f_k(x)$ ハ k 次斉次多項式）ナル展開ヲ有スルトキ m 次斉次多項式 $h_m(x)$ ニ對シテ D デ

$$h_m(f(x))=\sum_{k=mn}^{\infty}Q_k(x)$$

ナル展開ヲ有スル。

〔証明〕 $f(x)$ ハ D デ正則，又 $h_m(x)$ ハ空間全体デ正則デスカラ定理1ニヨリ $h_m(f(x))$ ハ D デ正則トナリマスカラ任意ノ正数 ε ニ對シテ $\|x\| \leq 1-\varepsilon$ ニ於ケル任意ノ compact set E デ絶對一様收斂スル級数ニ展開セラレマス。

$$h_m(f(x)) = \sum_0^\infty Q_k(x) \text{ .... } (2)$$

又 $f(x)$ ハ D デ正則デスカラ (1) ハ E デ絶對一様收斂シマス。D ニ於ケル任意ノ一点ヲ x トスレバ $\|x\| \leq 1-\varepsilon$ ナル正數 ε ガ存在シマス。

$\alpha x\ (|\alpha| \leq 1)$ ハ compact set デスカラ之ヲ E トシマス。従ッテ

$$f(\alpha x) = \sum_n^\infty \alpha^k f_k(x) \text{ .... } (1)'$$

$$h_m(f(x)) = \sum_0^\infty \alpha^k Q_k(x) \text{ .... } (2)'$$

ハ E デ絶對一様收斂シマス。

$$\begin{aligned} f(\alpha x) &= \alpha^n(f_n(x) + \alpha f_{n+1}(x) + \alpha^2 f_{n+2}(x) + \cdots\cdots) \\ &= \alpha^n\{f_n(x) + \alpha R(x, \alpha)\} \quad \text{（トオキマス）} \end{aligned}$$

(1)′ ガ E デ絶對一様收斂シマスカラ

$$R(x, \alpha) = \sum_{k=0}^\infty \alpha^k f_{n+k}(x)$$

ハＥデ絶對一様收斂シマス。從ッテ $R(x,\alpha)$ ハ α ニ關シテ $|\alpha|\leqq 1$ デ連續トナリマスカラ $|\alpha|\leqq 1$ ニ於テ

$$\|R(x,\alpha)\|\leqq N$$

$h_m(x)$ ハ連續デスカラ $\varepsilon_1(>0)$ ヲ任意ニトリマスト $\delta_1(>0)$ ガ定マリ $|\alpha|\leqq\delta_1$ ナルトキ上式ヲ用ヒマスト

$$|h_m(f_n(x)+\alpha R(x,\alpha))-h_m(f_n(x))|\leqq\varepsilon_1$$

今 $h_m(f_n(x)+\alpha R(x,\alpha))-h_m(f_n(x))$

$$=\varepsilon_1(x,\alpha)$$

トオキマス。

然ルトキハ $(2)'$ ニ於テ

$$\begin{aligned}h_m(f(\alpha x))&=h_m(\alpha^n(f_n(x)+\alpha R(x,\alpha)))\\&=\alpha^{mn}h_m(f_n(x)+\alpha R(x,\alpha))\\&=\alpha^{mn}\{h_m(f_n(x))+\varepsilon_1(x,\alpha)\}\end{aligned}$$

ナル故ニ

$$\alpha^{mn}\{h_m(f_n(x))+\varepsilon_1(x,\alpha)\}=\sum_0^\infty\alpha^kQ_k(x)$$

右辺ハＥデ絶對一様收斂デスカラ $C(|\alpha|=\delta_1)$ デ α ニツイテ積分シマスト

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{1}{\alpha^{j+1}}\left\{\sum_0^\infty\alpha^kQ_k(x)\right\}d\alpha$$

$$= \sum_{0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_C \alpha^{k-j-1} Q_k(x)\, d\alpha$$

$$= Q_j(x)$$

左辺ニ於テハ

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\alpha^{mn} h_m(f_n(x))}{\alpha^{j+1}} d\alpha = h_m(f_n(x))$$

$$(j = mn ノトキ)$$

$$= 0 \qquad (j \neq mn)$$

又 $$\left\| \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\alpha^{mn} \varepsilon_1(x, \alpha)}{\alpha^{j+1}} d\alpha \right\| \leqq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \delta_1^{mn-j} \varepsilon_1\, d\theta$$

$$= \delta_1^{mn-j} \varepsilon_1 \leqq \varepsilon_1$$

$$(j \leqq mn ナルトキ)$$

$$\therefore \quad \| Q_{mn}(x) - h_m(f_n(x)) \| \leqq \varepsilon_1$$

$$\| Q_j(x) \| \leqq \varepsilon_1 \qquad (j = 0, 1, 2, \cdots\cdots, mn-1)$$

ε_1 ハ任意デスカラ $Q_{mn}(x) = h_m(f_n(x))$

$$Q_j(x) = 0 \qquad (j = 0, 1, 2, \cdots\cdots, mn-1)$$

x ハ任意デスカラ D ノ凡テノ x ニ對シテ成立シマス。

$$\therefore \quad h_m(f(x)) = \sum_{k=mn}^{\infty} Q_k(x)$$

但シ $Q_{mn}(x) = h_m(f_n(x))$ 　　以上

［定理4］ 領域 D $(\|x\| < 1)$ デ $X(x)$ ハ正則デ且ツ

$$X = X(x) = x + P_2(x) + P_3(x) + \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

($P_k(x)$ハk次齊次多項式)ナル展開ヲ有シ、

$X \in D$ ナレバ

$$X = x$$

〔証明〕 $X(x)$ハDデ正則デスカラ任意ノ正数εヲトリマスト$\|x\| \leqq 1-\varepsilon$ニ含マレルcompact setデ絶對一様收斂スル齊次多項式ノ級數(1)ニ展開出来マス。

$P_k(x)$ハ全部ハ恒等的ニ0デナイトシ、初メテ恒等的ニ0デナイモノヲ$P_n(x)$トシマス。ソウシマストアルxガ存在シテ$P_n(x) \neq 0$ 且$\|x\| \leqq 1-\varepsilon$ナル正數$\varepsilon$ガ存在シマス。コノ$x$ニ對シテ$\alpha x$($|\alpha| \leqq 1$)ハcompact setデスカラ之ヲFトシマス。

$X(X(x))$ハDデ定義セラレ定理1ニヨレバDデ正則ニナリマス。

$X(X(x)) = X_1(x)$トオキマスト、$X(0)=0$ダカラ

$$X_1(0) = X(X(0)) = 0$$

デスカラ

$$X_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} P_k^{(1)}(x) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

($P_k^{(1)}(x)$ハk次齊次多項式)

ハFデ~~絶對~~一様收斂シマス。

又$P_k(X(x))$ヲ考ヘマスト補助定理ニ於テ$m=k$、$n=1$、$f_1(x)=x$ノ場合デスカラ

（$P_k(x)$ ハ k 次斉次多項式）ナル展開ヲ有シ，

$X\in D$ ナレバ

$$X=x$$

〔証明〕 $X(x)$ ハ D デ正則デスカラ任意ノ正数 ε ヲトリマスト $\|x\|\leqq 1-\varepsilon$ ニ含マレル compact set デ絶對一様收斂スル斉次多項式ノ級數 (1) ニ展開出来マス。

$P_k(x)$ ハ全部ハ恒等的ニ 0 デナイトシ，初メテ恒等的ニ 0 デナイモノヲ $P_n(x)$ トシマス。ソウシマストアル x が存在シテ $P_n(x)\neq 0$ 且 $\|x\|\leqq 1-\varepsilon$ ナル正數 ε が存在シマス。コノ x ニ對シテ αx（$|\alpha|\leqq 1$）ハ compact set デスカラ之ヲ F トシマス。

$X(X(x))$ ハ D デ定義セラレ定理 1 ニヨレバ D デ正則ニナリマス。

$X(X(x))=X_1(x)$ トオキマスト，$X(0)=0$ ヨリ

$$X_1(0)=X(X(0))=0$$

デスカラ

$$X_1(x)=\sum_{k=1}^{\infty}P_k^{(1)}(x)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

（$P_k^{(1)}(x)$ ハ k 次斉次多項式）

ハ F デ絶對一様收斂シマス。

又 $P_k(X(x))$ ヲ考ヘマスト補助定理ニ於テ $m=k$，$n=1$，$f_1(x)=x$ ノ場合デスカラ

$$P_k(X(x)) = \sum_{m=k}^{\infty} Q_m^{(k)}(x) \qquad 且\ Q_k^{(k)}(x) = P_k(x)$$

$$(k = n, n+1, \ldots\ldots)$$

次ニ $X(x)$ ハ連續函數デスカラ $X(F)$ ハ compact set ニナリマス。從ツテ適當ニ $\varepsilon'(>0)$ ヲトリマスト $\|X(F)\| \leqq 1-\varepsilon'$ トナリマス。何故ナレバモシカカル ε' が存在シナケレバ $X(F) \ni X(x_n)$ $(n = 1, 2, \ldots\ldots)$ が存在シ

$$\lim_{n\to\infty} \|X(x_n)\| = 1$$

E ハ compact set デスカラ $\{x_n\}$ ノ部分列 $\{x_{n_1}\}$ ヲトレバ

$$\lim_{n_1\to\infty} x_{n_1} = x_0 \quad (x_0 \in E)$$

トナリマス。

$X(x)$ ハ連續デスカラ $\lim\limits_{n_1\to\infty} X(x_{n_1}) = X(x_0)$

$$\therefore \quad \|X(x_0)\| = 1$$

之ハ $X(x_0)$ が D ノ點ナルコトニ反シマス。

依ツテ $X(F)$ ハ $\|X\| \leqq 1-\varepsilon'$ ニ於ケル compact set トナリマスカラ

$$X(X) = X + P_n(X) + P_{n+1}(X) + \cdots\cdots$$

ハ $X(E)$ デ絶對一様收斂シマス。

$$\therefore \quad X_1(x) = x + \sum_{k=n}^{\infty} P_k(x) + \sum_{k=n}^{\infty}\left(\sum_{m=k}^{\infty} Q_m^{(k)}(x)\right)$$

Eハ αx ($|\alpha| \leq 1$) デスカラ

$$X_1(\alpha x) = \left(\alpha x + \sum_{k=n}^{\infty} \alpha^k P_k(x)\right) + \sum_{k=n}^{\infty}\left(\sum_{m=k}^{\infty} \alpha^m Q_m^{(k)}(x)\right)$$

又 $X_1(\alpha x) = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha^m P_m^{(1)}(x)$

コノ二ツガ $|\alpha| \leq 1$ デ絶對一様收斂シマスカラ（但シ上ノ式ハ絶對一樣收斂スルモノノ和ガ又絶對一樣收斂）補助定理ノトキノヤウ一 $|\alpha| = 1$ 上デ積分シテ

$$P_1^{(1)}(x) = x$$

$$P_j^{(1)}(x) = 0 \qquad (j = 1, 2, \cdots\cdots, n-1)$$

$$P_n^{(1)}(x) = 2P_n(x)$$

$$\therefore \quad X_1(x) = x + 2P_n(x) + P_{n+1}^{(1)}(x) + P_{n+2}^{(1)}(x) + \cdots\cdots$$

之レヲ繰返シテ一般＝ $X_k(x) = X(X_{k-1}(x))$ トシマスト

$$X_k(x) = x + (k+1)P_n(x) + P_{n+1}^{(k)}(x) + P_{n+2}^{(k)}(x) + \cdots\cdots$$

$$\therefore \quad \|(k+1)P_n(x)\| = \left\|\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} e^{-in\theta} X_k(e^{i\theta}x)\, d\theta\right\| \leq 1$$

$$\therefore \quad \|P_n(x)\| \leq \frac{1}{k+1}$$

之レハ k ノ如何ニ関ラズ成立シマスカラ $P_n(x) \neq 0$ ニ反シマス．

$$\therefore \quad P_n(x) \equiv 0$$

$$\therefore \quad X(x) \equiv x \qquad\qquad (以上)$$

〔定義〕 complex Banach space E, E' ニ於ケル領域 D, D' ニ於テ夫々正則ナ函数 $X(x)$, $x(X)$ ガアリ $X(x) \in D'$, $x(X) \in D$ トシマス。

$$X = X(x), \quad x = x(X)$$

ナル変換ニヨリ D ガ D' ヘ可逆的ニ $1:1$ ニ對應スルトキ $X = X(x)$ ニヨリ D ガ D' ヘ解析的ニ変換（又ハ寫像）セラレタト云フコトニシマス。ソシテ $x = x(X)$ ヲ $X(x)$ ノ逆函数ト呼ブコトニシマス。

〔定理5〕 complex Banach space E, E' ニ於ケル領域 $D(\|x\| < 1)$, $D'(\|X\| < 1)$ ニ於テ

$$X = g(x) \qquad (g(0) = 0)$$

ガ D ヲ D' ヘ解析変換スルトキハ $g(x)$ ハ (linear デ) unitary トナル。

〔証明〕 $X = g(x)$ ハ解析変換デスカラ逆函数ヲ $x = f(X)$ トシマス。$1:1$ デスカラ明ラカニ $f(0) = 0$ トナリマス。

$$x' = e^{-i\theta} f(e^{i\theta} g(x)) = h(x) \quad (トオキマス)$$

ナル函数ヲ考ヘマスト $x' = h(x)$ ハ定理1ニヨリ明

ラカニDデ正則デxガDヲ動ケバx'ハDニ入リマス。且ツ$h(0)=0$.

今Dノ任意ノ点xヲトレバ正数εガ定マリ$\|\alpha x\| \leqq 1-\varepsilon \ (|\alpha| \leqq 1)$トナリマス。$\alpha x \ (|\alpha| \leqq 1)$ハcompact setトナリマスカラ之レヲ$S$トスレバ$h(x)$ハ$S$デ絶對一様收斂級數ニ展開セラレマス。$h(0)=0$デスカラ

$$h(x)=\sum_{n=1}^{\infty} h_n(x) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

又$g(x)$ハDデ正則デスカラ同様ニSニ於テ

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

$g(x)$ハ連續デスカラ$e^{i\theta}g(S) \ (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ハ$D'$デcompact setトナリマスカラ之レヲ$S'$トシマス。$S'$ニ對シ正數$\varepsilon'$ガ定マリ$S' \ni X$ナレバ$\|X\| \leqq 1-\varepsilon'$トナリマス。從ツテ

$$f(X)=\sum_{1}^{\infty} f_n(X) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

ハS'デ絶對一様收斂シマス。故ニ

$$h(x)=e^{-i\theta}\sum_{1}^{\infty} f_n\left(e^{i\theta}\sum_{1}^{\infty} g_n(x)\right)$$

補助定理ニヨリ右辺ヨリ一次有次多項式ハ

$$e^{-i\theta}f_1(e^{i\theta}g_1(x))=e^{-i\theta}e^{i\theta}f_1(g_1(x))=f_1(g_1(x))$$

トナリマス。

然ルニ $f(x)$ ハ $g(x)$ ノ逆函數デスカラ $x \equiv f(g(x))$ 定理ノ二ヨリ $f(g(x))$ ハ x ノ正則函數トナリマスカラ D ノ各点デ收斂シ S デ絶對收斂級數ニ展開出来テ定理4ノ場合ト同様ニ

$$x \equiv f(g(x)) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n\Big(\sum_{m=1}^{\infty} g_m(x)\Big)$$

補助定理ヲ用ヒテ一次齊次多項式ハ $f_1(g_1(x))$ トナリマスカラ

$$f_1(g_1(x)) = x$$

コヽニ x ハ任意デスカラ D ノ凡テノ x ニ對シ

$$h(x) = x + \sum_{2}^{\infty} h_n(x)$$

故ニ定理4ニヨリ　$h(x) \equiv x$

$$\therefore \quad e^{-i\theta} f(e^{i\theta} g(x)) = x$$

$$\therefore \quad f(e^{i\theta} g(x)) = x e^{i\theta}$$

$$\therefore \quad g(x e^{i\theta}) = g(f(e^{i\theta} g(x))) = e^{i\theta} g(x)$$

D ノ任意ノ x ニ對シ

$x e^{i\theta}$ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ ハ compact set

且ツ $\|x\| < 1$ デスカラ (2) ハコヽデ一様絶對收斂シマス。

$$\therefore \sum_{1}^{\infty} g_n(xe^{i\theta}) = e^{i\theta}\sum_{1}^{\infty} g_n(x)$$

$$\therefore \sum_{1}^{\infty} g_n(x)e^{in\theta} = e^{i\theta}\sum_{1}^{\infty} g_n(x)$$

$$\therefore \sum_{2}^{\infty} e^{i(n-1)\theta} g_n(x) = \sum_{2}^{\infty} g_n(x)$$

之ハ $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ デ成立シマスカラ

$$g_n(x) = 0 \qquad (n \geqq 2)$$

x ハ任意デスカラ　$g_n(x) \equiv 0$　乃チ

$$g(x) = g_1(x)$$

$g_1(x)$ ハ一次有次多項式デスカラ定理2ニヨリ *linear* トナリマス.

同様ニシテ $f(X) = f_1(X)$ トナリ *linear* トナリマス.

次ニ D ノ任意ノ x ニ對シ, 任意ノ正數 ε ヲトリ

$y = \dfrac{x}{\|x\| + \varepsilon}$ ヲ考ヘマスト $\|y\| = \dfrac{\|x\|}{\|x\| + \varepsilon} < 1$

デスカラ $y \in$ D。

$g(y)$ ハ一次有次多項式デ $y \in$ D ナレバ $g(y) \in$ D′ デスカラ

$$1 > \|g(y)\| = \left\|g\left(\frac{x}{\|x\|+\varepsilon}\right)\right\| = \frac{1}{\|x\|+\varepsilon}\|g(x)\|$$

$$\therefore \quad \|g(x)\| < \|x\| + \varepsilon$$

ε ハ任意デスカラ

$$\|g(x)\| \leqq \|x\|$$

同様ニシテ　　$\|f(X)\| \leqq \|X\|$

従ツテ $X = g(x)$ ナル X ニ對シ

$$\|f(g(x))\| \leqq \|g(x)\|$$

$$\therefore \quad \|x\| \leqq \|g(x)\|$$

$$\therefore \quad \|g(x)\| = \|x\|$$

又 $g(x)$ ハ逆変換ヲ有シマスカラ unitary トナリマス。　（以上）

以上 n 変数解析函数ヲ complex Banach space デ考ヘテ見マシタ。

角谷先生ヨリ絶エズ御教示下サイマシタコトヲ深ク感謝致シマス，

〔附記〕　後デ氣ガ付イタノデスガ A.E. Taylor ノ論文ノ〔定理A〕ニ於テハ $f(x)$ ガ連續デスカラ充分小サイ正数 δ ニ対シテ $\|x - x_0\| < \delta$ デハ

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{1}^{\infty} f_n(x_0, x - x_0)$$

ハ絶對一様收斂シマス。

之ヲ使ヒマスト定理ノハ近傍ダケデ考ヘテ牛マスカラ幾分簡單ニナリマス。